NEKONEČNÁ GEOMETRICKÁ ŘADA

1) Napište nekonečnou geometrickou řadu pomocí sumy:
   a) $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - \dots$
   b) $\frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} + 3 + 3x + 3x^2 + \dots$

2) V případě, že je řada konvergentní určete její součet:
   a) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \dots$ [s=3]
   b) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$ $\left[-\frac{2}{9}\right]$
   c) $2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \dots$ [divergentní]
   d) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$
   e) $\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \dots$ $\left[2 + 2\sqrt{2}\right]$

5. Daná reálná čísla zapište zlomkem v základním tvaru:
   a) $0,\overline{8}$ $\left[\frac{8}{9}\right]$
   b) $0,\overline{370}$ $\left[\frac{10}{27}\right]$
   c) $1,0\overline{32}$ $\left[\frac{511}{495}\right]$
   d) $25,6\overline{7}$ $\left[\frac{2311}{90}\right]$

2) Určete, pro která $x \in R$ je daná řada konvergentní. Určete součet dané řady.
   a) $2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + \dots$ [pro $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ $je\ s = \frac{2}{1-2x}$]
   b) $x + 4 + (x+4)^2 + (x+4)^3 + \dots$ [pro $x \in (-5; -3)$ $je\ s = -\frac{x+4}{x+3}$]
   c) $x + 2x + 4x + 8x + \dots$ [není konvergentní pro žádné x]
   d) $\sum_{i=1}^{\infty} x^{-2i}$ [pro $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ $je\ s = \frac{1}{x^2 - 1}$]

3) Řešte rovnici:
   a) $1 + 3x + 9x^2 + \dots = 10$ $\left[\frac{3}{10}\right]$
   b) $2 - 4x + 8x^2 - \dots = 1$ [ ]
   c) $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \dots\dots = \frac{4x-3}{3x-4}$ [6]

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^{n-1} = \frac{4}{x-4}$ [6]

4) Vypočítejte:

a) $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + \ldots =$

b) $\log x + \log\sqrt{x} + \log\sqrt[4]{x} + \log\sqrt[8]{x} + \ldots =$

c) $5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[8]{5} \cdot \ldots =$

5) Součet nekonečné konvergentní geometrické řady je 9, součet druhých mocnin všech jejích členů je roven 40,5. Napište tuto řadu. $\left[q = \frac{1}{3}; a_1 = 6\right]$

6) Strany čtverce rozdělíme v poměru 3 : 4 tak, aby u každého vrcholu byl jeden menší a jeden větší díl. Spojením dělících bodů vznikne opět čtverec. Stejným způsobem vepíšeme do něj další čtverec atd. Určete součet obvodů všech těchto čtverců.

7) Do čtverce ABCD o délce strany 1 je vepsán čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tak, že A_1, B_1, C_1, D_1 jsou postupně středy stran AB, BS, CD, DA; obdobně vepíšeme čtverec $A_2B_2C_2D_2$ do čtverce $A_1B_1C_1D_1$ atd. Vypočtěte součet obvodů a obsahů všech takto vzniklých čtverců.
$\left[4.\left(2+\sqrt{2}\right); \ 2\right]$

8) Spirála se skládá z nekonečně mnoha polokružnic. Přitom poloměr každé následující polokružnice je dvakrát menší než poloměr předchozí polokružnice. Poloměr první polokružnice je 5. Určete délku spirály. $[10\pi]$